УДК 528.48 https://doi.org/10.32347/0130-6014.2019.66.52-63

В.М. Гладілін, *канд. техн. наук, проф. кафедри аерокосмічної геодезії,*
А.О. Дубкова, *студентка кафедри аерокосмічної геодезії*
Національний авіаційний університет
П.О. Чуланов, *ст. викл. кафедри інженерної геодезії,*
Н.С. Шудра, *ст. викл. кафедри інженерної геодезії*
Київський національний університет будівництва і архітектури

ДЕФОРМАЦІЙНІ МОДЕЛІ ЯК ФІЗИЧНІ ПРОЦЕСИ

Зважаючи на особливості деформаційних процесів виконано порівняння різних деформаційних моделей: статичних, динамічних, кінематичних для вибору найбільш достовірної моделі деформації промислового обладнання. З'ясовано, що серед деформаційних моделей найбільш доцільною виявилась динамічна модель, яка дає змогу за виміряними деформаціями розраховувати сили, які викликають зміни форми та розмірів об'єктів, а також впливають на їх цілісність.

Ключові слова: *статична, кінематична і динамічна моделі деформацій промислового обладнання.*

Вступ. Розроблено багато функцій для одержання значень деформацій, які виникають переважно внаслідок вертикальних зміщень (осідань споруд) і горизонтальних зміщень споруд і промислового обладнання. Деякі автори вказують на математичні функції, які апроксимують деформації, як на загальні методи визначення деформацій. У статті розглянуті моделі деформацій як фізичні процеси. Порівнюючи статичну, кінематичну та динамічну моделі, встановлено, що динамічна модель найбільш достовірно і повно описує деформації промислового обладнання.

Аналіз досліджень і публікацій. У динамічних моделях встановлюються зв'язки між рухами і причинами, які їх зумовлюють і дають можливість задавати однозначні математичні відношення між геометричними змінами точок об'єкта, що визначаються геодезичними вимірюваннями та зовнішніми силами. Такі окремі моделі описано в роботах [1-8].

Постановка задачі. У статичній моделі [9] визначення деформацій – це обчислення за геодезичними вимірюваннями визначених точок на об'єкті дослідження на конгруентність. У таких моделях не відображено деформацій, які спричинені зовнішніми чинниками, і встановлено рівновагу об'єкта спостереження під дією прикладених до нього сил.

У кінематичних моделях деформації описують загальними формулами рівномірного руху точок об'єкта без урахування сил, що діють на нього, параметри яких на початку є невідомими.

Потрібно визначити, яку деформаційну модель доцільно використовувати.

Основна частина. Якщо $S(X_a)$ – деформації, які залежать від будь-яких параметрів X_a, то в статичних моделях вони дорівнюють нулю. У кінематичних моделях деформації визначають форму тільки відносно відомих параметрів. У динамічних моделях деформації визначаються відповідно до форми, й до параметрів об'єкта.

Деформації $S(X_a)$ – це неперервні, розподілені на об'єкті геометричні зміни у часі, які є функцією дії параметрів X_a на об'єкт.

Якщо дискретизувати об'єкт, що розглядається, на окремі точки, одержимо його фізичні (проектні) координати $X_{x.p.t}$ на момент t, які визначають за формулою:

$$X_{x.p.t} = X_{x.t} + S(X_a), \tag{1}$$

при цьому вектор $X_{x.t}$ може відповідати будь-якій вихідній ситуації на час t.

Незалежно від цього сукупність координат точок (1) можна визначати за будь-яким геодезичним методом після вирівнювання спеціальної геодезичної мережі $X_{g.t}$. За допомогою приблизних (виміряних) координат точок $X_{\xi.t}$ потрібно перейти до відповідних геодезичних (вирівняних) координат $X_{x.g.t}$:

$$X_{x.g.t} = X_{\xi.t} + A_{\zeta.t} X_{\zeta.t}, \tag{2}$$

де $A_{\zeta.t}$ – оператор перетворення виміряних значень координат $X_{\zeta.t}$ на час t.

Рух точок об'єкта характеризується траєкторією, довжиною шляху, швидкістю, прискоренням і зміщенням [9]. Рух точки може бути рівномірним і нерівномірним.

Траєкторія – просторова лінія, яка описується точкою під час її руху. Траєкторія руху в просторі є прямолінійною або криволінійною.

Довжина шляху (скаляр) – довжина відрізка траєкторії, який пройшла точка за визначений проміжок часу *t*.

Швидкість та прискорення деформації (руху точки об'єкта) у різні моменти можуть бути різними – як додатними, так і від'ємними.

Зміщення – вектор, який з'єднує початкове положення рухомої точки і її положення за розглянутий проміжок часу з напрямком до її кінцевого положення, визначається як різниця початкових (проектних) і виміряних за час t координат ідентичних точок.

В ідеалі визначені за геодезичними методами координати n точок об'єкта повинні дорівнювати проектним координатам, тому можна записати тотожність:

$$X_{x.p.t} \equiv X_{x.g.t}, \quad \cap = 1,2,...,n, \tag{3}$$

на підставі якої одержимо нелінійну функціональну модель, вважаючи, що рівняння (1) і (2) є тотожними:

$$\Psi(L,X) = X_{x.t} + S(X_a)_t - X_{\xi.t} - A_{\zeta.t} X_{\zeta.t} = 0,\ t = 1,...,n, \tag{4}$$

у матричному вигляді:

$$\Psi(L,X) = \begin{vmatrix} X_{x.1} \\ X_{x.i} \\ X_{x.n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S(X_a)_1 \\ S(X_a)_i \\ S(X_a)_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_{\zeta.1} \\ X_{\zeta.i} \\ X_{\zeta.n} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_{\zeta.1} X_{\zeta.1} \\ A_{\zeta.i} X_{\zeta.i} \\ A_{\zeta.n} X_{\zeta.n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Ця система рівнянь відповідна моделі Гаусса – Гельмерта або системі рівнянь, сформульованих на підставі відповідних результатів оцінювання, котрі є умовними рівняннями з невідомими координатами $\boldsymbol{x}$ точок об'єкта:

$$Bv + Ax + w = 0, \qquad \Sigma_l^2 = \sigma_0^2 Q_l, \quad l = 1,2,...,n, \tag{6}$$

де v – вектор опору матеріалу об'єкту, w – вектор вільних членів, Σ_l^2 – загальна дисперсія, Q_l – діагональна коваріаційна матриця.

При цьому вектор вимірювань або відповідний йому вектор невідомих будують таким чином:

$$\begin{aligned} L^T &= \left| X_\xi^T X_a^T \right| = \left| X_{\xi.1}^T,...,X_{\xi.n}^T X_a^T \right|, \\ X^T &= \left| X_x^T X_\zeta^T \right| = \left| X_{x.1}^T,...,X_{x.n}^T X_{\zeta.1}^T,...,X_{\zeta.n}^T \right|. \end{aligned} \tag{7}$$

Коефіцієнти рівняння (6) у матричному представлені мають вигляд:

$$B = \left| -IB_a \right| = \begin{vmatrix} -I & ... & B_{a.1} \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & -IB_{a.n} \end{vmatrix}, \; A = \left| -IA_\zeta \right| = \begin{vmatrix} -I & ... & A_{\zeta.1} \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & -IA_{\zeta.n} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

вектор опору описують рівнянням:

$$v = \Psi\left(L^0, X^0\right) + Bv = X_x^0 + S\left(X_a^0\right) - X_\xi^0 - A_\zeta X_\zeta^0 - \left(X_\xi - X_\xi^0\right) + \left(X_a - X_a^0\right). \tag{9}$$

Одержана для рівняння (6) стохастична модель є дійсною з урахуванням системи рівнянь (7), загальну дисперсію знайдемо за формулою:

$$\Sigma_l^2 = \sigma_0^2 \begin{vmatrix} Q_{x.\xi} & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & Q_{x.a} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Підставимо вирази (8) і (9) у рівняння (6), одержимо:

$$v_\xi = B_a v_a + x_x - A_\zeta x_\zeta + w, \quad \Sigma_l^2 = \sigma_0^2 Q_l, \quad l = 1,2,...,n. \tag{11}$$

Незалежно від цього для розуміння, які параметри діють на об'єкт, можна виходити з такої основної залежності:

$$X_a = X_a + v_a = X_a^0 + x_a. \tag{12}$$

З рівностей (11) і (12) одержимо:

$$v_{y.\zeta} = A_{y.\zeta} x_{y.\zeta} - w_{y.\zeta}, \tag{13}$$

у матричному вигляді:

$$\begin{vmatrix} v_\xi \\ v_\zeta \\ v_a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I - A_\zeta B_a \\ .... \\ 0....0.....I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_x \\ x_\zeta \\ x_a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\left[w - B_a\left(X_a - X_a^0\right)\right] \\ .... \\ ....\left(X_a - X_a^0\right) \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Для того щоби модель була достовірною з урахуванням рівності (9), потрібно, щоби загальна дисперсія була такою:

$$\Sigma_{l.y.\zeta}^2 = \sigma_0^2 Q_{l.y.\zeta} = \sigma_0^2 Q_l, \qquad l = 1,2,...,n. \tag{15}$$

Таким чином, система рівнянь (13) буде задаватись іншими параметрами, тобто невідомі параметри даних входять один раз безпосередньо і один раз опосередковано через x_ζ у вектор рішень $x_{y.\zeta}$. Між знайденим спеціальним рішенням x_x і деяким рішенням $x_{x.a}$ є така залежність:

$$x_x - x_{x.a} = A_\zeta \left(x_\zeta - x_{\zeta.a} \right). \tag{16}$$

Застосувавши до вектора рішень мінімальну евклідову норму

$$x_x^T x_x \to min, \tag{17}$$

одержимо такі умовні рівняння:

$$A_\zeta x_x = 0. \tag{18}$$

З другого боку, з системи рівнянь (13) з невідомими параметрами даних з урахуванням рівняння (18) одержимо:

$$x_\zeta = -\left(A_\zeta^T A_\zeta \right)^{-1} A_\zeta^T \left\{ v_\xi - B_a x_a - \left[w - B_a \left(X_a - X_a^0 \right) \right] \right\}, \tag{19}$$

Підставивши вираз (19) у вихідне рівняння (13), одержимо:

$$F = I - A_\zeta^T \left(A_\zeta^T A_\zeta \right)^{-1} A_\zeta^T, \tag{20}$$

де F – симетрична ідемпотентна матриця.

З урахуванням рівнянь (20) і (18) вираз (13) набуде вигляду:

$$v_\xi = x_x + F B_a x_a - \left\{ -F \left[w - B_a \left(X_a - X_a^0 \right) \right] \right\}. \tag{21}$$

За допомогою виразу (13) для підвектора v_y отримаємо таку скорочену модель:

$$v_y = A_y x_y - w_y, \tag{22}$$

у матричному вигляді:

$$\begin{vmatrix} v_\xi \\ \ldots \\ v_a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I......FB_a \\ .... \\ 0..........I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_x \\ \ldots \\ x_a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -F\left[w - B_a \left(X_a - X_a^0 \right) \right] \\ .... \\ ....\left(X_a - X_a^0 \right) \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Дисперсія для відповідної стохастичної моделі з урахуванням виразів (10) і (15) набуде вигляду:

$$\Sigma_{l.y}^2 = \sigma_0^2 \begin{vmatrix} FQ_{x.\xi}F^T.....0 \\ 0................0 \\ 0...........Q_{x.a} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Матрицю з коефіцієнтами рівнянь геодезичної мережі можна представити у спектральному вигляді:

$$Q_{x.\xi} = HG^{-1}H^T. \tag{25}$$

При цьому у матриці H містяться власні вектори постійних власних значень, матриця G^{-1} містить власні вектори, які належать до вільних параметрів даних, тоді матрицю F, задану рівнянням (20), можна описати так:

$$F = I - GG^T. \tag{26}$$

З рівнянь (25) і (26) одержимо:

$$FQ_{x.\xi} = Q_{x.\xi}. \tag{27}$$

і остаточно з виразу (24) одержимо загальну дисперсію:

$$\Sigma_{l.y}^2 = \sigma_0^2 Q_{l.y} = \sigma_0^2 Q_l, \qquad l = 1,2,...,n. \tag{28}$$

Вважаючи, що $L^0 \equiv L$, отримаємо стохастичну модель:

$$v_y = A_y x_y - w_y; \qquad \Sigma^2_{l.y} = \sigma^2_0 Q_{l.y}; \qquad l = 1,2,...,n, \tag{29}$$

у матричному вигляді:

$$\begin{vmatrix} v_\xi \\ ... \\ v_a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & ... & FB_a \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_x \\ ... \\ x_a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -Fw \\ ... \\ 0 \end{vmatrix}; \qquad \sigma^2_0 = \begin{bmatrix} Q_{x.\xi} & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & Q_{x.a} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Відповідно до розміру матриці коефіцієнтів A_y встановимо, що система рівнянь (30) не розходиться без введення остаточного вектора v_y, звідки можна дійти висновку про те, що зникає відповідна сума квадратів $\Sigma^2_{l.y}$ та надлишковість r:

$$\Omega = v^T_y Q_{l.y} v_y = 0, \; r_y = r(Q_{l.y}) - r(Q_{x.y}) = 0. \tag{31}$$

Таким чином, вираз (30) можна розглянути як вільну від гіпотези H модель рівнянь, яка являє собою розв'язок задачі, описаної виразами (1), (2), (3).

У цій моделі, спираючись на те, що для кожного виразу вводиться особливий вектор вирівняних координат $X_{x.e}$ для опису прийнятої вихідної ситуації $X_{x.t}$, проте, якщо функція деформації $S(X_a)$ вказує на відсутність деформації, ці вектори $X_{x.e}$ та $X_{x.t}$ повинні збігатися для всіх періодів, таким чином, не можна відкидати гіпотезу, що:

$$H : X_{x.e} - X_{x.t} = 0, \qquad e = 1,...,n, \tag{32}$$

Відповідно модель рівняння (29) з огляду на те, що $L^0 \equiv L$, буде такою:

$$v_{y.0} = A_{y.0} x_{y.0} - w_y; \quad \Sigma_{l.y} = \sigma^2_0 Q_{l.y}, \; l = 1,2,...,n,$$

у матричному вигляді:

$$\begin{vmatrix} v_{\xi.1.0} \\ ... \\ v_{\xi.n.0} \\ v_{a.0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 & F_1 & B_{a.1} \\ ... & ... & ... \\ I_n & F_n & B_{a.n} \\ 0 & ... & I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{x.0} \\ ... \\ ... \\ x_{a.0} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -F_1 w_1 \\ ... \\ -F_n w_n \\ 0 \end{vmatrix}; \; \sigma^2_0 = \begin{vmatrix} Q_{x.\xi.1.0} & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & Q_{x.\xi.1.n} & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & Q_{x.a} \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Вважаючи, що міжперіодична кореляція дорівнює нулю, можна записати:

$$Q_{x.\xi.i.j} = 0, \quad \xi = 1,...,n, \qquad i \neq j. \tag{34}$$

Отримаємо відповідну систему нормальних рівнянь, яка з огляду на рівняння (27) матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{l.y} Q_{x.\xi.1.1} \ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma_{l.y} Q_{x.\xi.1.n} B_{a.1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma_{l.y} B_{a.1} Q_{x.\xi.1.n} \Sigma_{l.y} B_{a.1} Q_{x.\xi.1.n} B_{a.1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{x.0} \\ . \\ x_{a.0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\Sigma_{l.y} Q_{x.\xi.1.1} w \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\Sigma_{l.y} B_{a.1} Q_{x.\xi.1.n} w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Введемо у функціональну модель вектори рішень з системи рівнянь (33), одержимо

$$x_{y.0} = N_{y.0} n_{y.0} \tag{36}$$

і визначимо остаточний вектор $v_{y.0}$, (N – коефіцієнти нормальних рівнянь, n – перетворені вільні члени нормальних рівнянь).

Результуючи й оптимізуючи $\Sigma^2_{l.y}$ сумму квадратів відхилень і надлишковість r_y рівнянь системи (33), отримаємо з рівностей (31):

$$\Omega = v^T_{y.0} Q_{l.y} v_{y.0} = 0 , \qquad r_{y.0} = r(Q_{l.y}) - r(Q_{x.y.0}) = 0 . \tag{37}$$

Для перевірки гіпотези (32) пропонується тестова величина F -розподілу:

$$F_{r.y.0,r.\xi.a} = \frac{R}{bs^2_0} \approx F(r_{y.0}, r_{\xi.a}, \lambda_F). \tag{38}$$

Якщо йдеться про H_0, то зникає параметр нецентрованості λ_F (систематичне зміщення) і є справедливим імовірнісне відношення:

$$P\{F_{ry0.r\xi a} \ge F_{ry.0r\xi.a.(1-\alpha)} | H_0\} = \alpha , \tag{39}$$

де α – довірча ймовірність.

Якщо тестова величина $F_{ry0,r\xi a}$ є більшою від відповідного квантиля F – розподілу $F_{ry,0r\xi,a;1-a}$, то H_0 слід коригувати відповідно до виразів (32). Обумовлене гіпотезою зменшення суми квадратів відхилень, а також надлишковості вимірювань виявляється з урахуванням виразів (31), (37) у рівності:

$$R = \Omega_{y.00} - \Omega_y ; \qquad b = r_{y.0} - r_y ,. \tag{40}$$

Введено у вираз (38) варіацію s^2_0 та надлишковість $r_{\xi a}$, які треба вилучити з попередніх рівнянь. Якщо потрібно змінювати H_0, то треба дослідити два варіанти зміни і виконати аналіз ідентичності деформації.

Проаналізувавши ідентичність рівняння (35), локалізуємо власні зміщення точок, які не повинні бути вилучені, при цьому зміщення можуть відбуватися незалежно від деформацій об’єкта.

Статична модель деформації. Статична модель [9] – модель рівноваги тіл. Такою моделлю описуємо об’єкти, які не змінюють геометричної форми за розглянутий період. В цьому відношенні краще звернутися до цих утворень, ніж до тотожності (3) і відповідно до моделі співвідношення, якщо застосовувати ці процеси тільки для аналізу тотожності. Слід дати відповідь на запитання, чи мають обрані точки обладнання власні рухи (зміщення), тобто якою мірою збігаються однойменні точки. Статична модель передбачає неприпустимість жодних деформацій $S(X_a)$, разом з тим виключаємо коефіцієнти матриці B і коефіцієнти матриці відповідних параметрів впливу Q_x, тобто

$$B_{a.e} = 0; \qquad Q_{x.a} = 0; \qquad \forall e = 1,...,n . \tag{41}$$

У подальшому слід мати на увазі те, що псевдообернена симетрична матриця, ідентична сама собі, є:

$$Q^+_{x.a} = Q_{x.a} , \quad \forall Q_{x.a} = Q^T_{x.a} = Q^2_{x.a} . \tag{42}$$

Разом з тим параметри із системи рівнянь (35), які належать системі нормальних рівнянь

$$N^s_{y.0} x^s_{y.0} - n^s_{y.0} = 0 ,$$

у матричному вигляді:

$$\begin{vmatrix} \Sigma^n Q_{x.\xi.ee} 0 \\ .....0.......0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^5_{x.0} \\ x^5_{a.0} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\Sigma^+_{x.\xi.ee} w_e \\ ....0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{43}$$

Звичайна статична модель деформації є такою з огляду на описані особливі випадки, тобто вилучені коефіцієнти із загального рішення (41). Перевага цього процесу полягає у відносно простій структурі, отже, можуть бути використані спеціальні геодезичні вимірювання (мережі), однак природний недолік фактично обґрунтовує те, що жодних деформацій не беруть до уваги. Під час геодезичного визначення багатьох точок на об’єкті цей процес є оптимальним.

Кінематична модель деформації. Кінематика [9] є теорією руху тіл незалежно від сили, яка впливає на рух тіл.

Такою моделлю описуємо об’єкти, про які знаємо, що вони деформуються. Відомо, що деформації є визначеними функціями місця (об’єкта), сил, часу та інших специфічних параметрів, які впливають на деформаційні процеси. Зважаючи на це, деформація не буде визначена для об’єкта тільки однією неперервною функцією. Відомо, що зв'язок між причиною і дією деформації є неоднозначним.

Останніми роками розроблено багато подібних зв’язків (функцій), чимало ідей у виборі найрізноманітнішиих математичних функцій доволі нескінченних, автори яких часто вказують на розширені функції як на загальні методи визначення деформацій, хоча вони являють собою лише поодинокі випадки моделювання деформаційних процесів [5-8]. Всі кінематичні моделі мають недолік, який полягає в тому, що вони представляють однозначний математичний зв'язок між фізичною причиною деформації і геометричною дією на об’єкт.

Визначення кінематичних моделей, таким чином, відбувається внаслідок того, що функція деформації $S(X_a)$ представлена в загальній формі. Означені параметри впливу цих зв’язків залишаються знову ж таки невідомими. Коефіцієнти матриці B можна визначити, а коефіцієнти матриці відповідних параметрів впливу Q_x так само, як у статичних моделях, вилучають відповідно до виразів (42):

$$B_{a.e} = B_{a.e}, \quad Q_{x.a} = 0, \quad \forall e = 1,...,n, \tag{44}$$

Беручи до уваги вирази (42), одержимо з системи рівнянь (35) систему нормальних рівнянь:

$$N^k_{y.0} x^k_{y.0} - n^k_{y.0} = 0,$$

у матричному вигляді:

$$\begin{vmatrix} \Sigma^n Q^+_{x.\xi.ee} ......\Sigma^n Q_{x.\xi.ee} B_{a.e} \\ \Sigma^n B^T_{a.e} Q^+_{x.\xi.ee} \; \Sigma^n B^T_{a.e} Q^+_{x.\xi.ee} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^k_{x.0} \\ x^k_{a.0} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\Sigma^n Q_{x.\xi.ee} w_e \\ -\Sigma^n B^T_{a.e} Q^+_{x.\xi.ee} w_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{45}$$

Кінематична модель (*Chen*, 1983), зважаючи на рівняння (41), це частковий випадок загального рішення. Перевагою цієї моделі є те, що деформації об’єкта можуть бути враховані. Незручність полягає в тому, що параметри впливу $x^k_{a.0}$ можна оцінити як різницю вимірювань в різний час. Вони безпосередні у визначенні коефіцієнтів матриці B і залежать від точності вимірювань. Зовнішніх відомостей для визначення величин $x_{a.0}^{k}$ немає.

Динамічна модель деформації [5; 8; 9]. За допомогою такої моделі можна описувати об’єкти, про які відомі їх зміни форми, розмірів та/або об’єму. Для того щоби задати цю модель, потрібно знати матеріал об’єкта і його властивості, а також зовнішні сили, які діють на об’єкт. Визначення деформації об’єкта виконують за допомогою сили зміщення:

$$K \cdot a + f = 0. \tag{46}$$

Величина K є глобальною матрицею жорсткості, а вектор a відображає зміщення точки, вектор f - сили, які спричиняють ці зміщення. Якщо відомі коефіцієнти матриці жорсткості, які залежать від властивостей матеріалу об’єкта, та вектор навантажень, можна розрахувати вектор зміщення точки a. Деформацію $S(X_a)$ визначають інтерполяцією. Якщо вираз (46) визначається лінійними функціями, то оцінка виразу (46) буде простою (лінійною). Якщо навантаження об’єкта перевищує деякі межі, то матеріал починає реагувати пластично або в’язко-пластично. Динамічна модель передбачає, що функція деформації цілком задана, при цьому відомі коефіцієнти матриці $B_{a,e}$, а також матриця коефіцієнтів $Q_{x,a}$:

$$B_{a.e} = B_{a.e}, \quad Q_{x.a} = Q_{x.a}, \quad \forall e = 1,...,n, \tag{47}$$

Відповідна система нормальних рівнянь, яка випливає з системи рівнянь (35), буде такою

$$N_{y.0}^{d} x_{y.0}^{d} - n_{y.0}^{d} = 0,$$

у матричному вигляді:

$$\begin{vmatrix} \Sigma^n Q^+_{x.\xi.ee} \; ......\Sigma^n Q_{x.\xi.ee} B_{a.e} \\ \Sigma^n B^T_{a.e} Q^+_{x.\xi.ee} Q^+_{x.a} \Sigma^n B^T_{a.e} Q^+_{x.\xi.ee} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^d_{x.0} \\ x^d_{a.0} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\Sigma^n Q_{x.\xi.ee} w_e \\ -\Sigma^n B^T_{a.e} Q^+_{x.\xi.ee} w_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{48}$$

Для прикладу візьмемо наведені в таблиці виміряні значення зміщень точок обладнання з роботи [8], і складемо 21 рівняння за виразом (46).

Таблиця

Виміряні зміщення точок обладнання і навантаження

№ точки, j	$a_{h.j}=S(h)$, мм	$a_{x.j}=S(x)$, мм	$a_{y.j}=S(y)$, *мм*	*Наванта-ження f, т*	*Наванта-ження $f_{обч.}$, т*	Δf
1	-5,0	-12,0	5,0	1,3	- 1,1790	-0,121
2	-5,5	-10,0	7,0	1,2	- 1,1586	-0,041
3	-6,0	-4,0	15,0	1,1	- 1,0877	-0,013
4	-7,0	-3,0	10,0	1,1	- 1,0473	-0,053
5	-5,0	-7,0	9,0	0,9	- 1,0867	0,187
6	-6,5	5,0	8,0	0,9	- 0,8166	-0,083
7	-3,0	6,0	-1,0	0,8	-0,6244	-0,176
8	-4,0	-10,0	-3,0	1,0	- 1,0368	0,036
9	-2,0	-8,0	7,0	1,0	- 1,0161	0,016
10	-2,5	-5,0	-1,0	0,9	- 0,8874	-0,012

Закінчення табл.

11	-4,0	-1,0	0,0	0,8	- 0,8348	0,035
12	-5,0	-5,0	-4,0	0,9	- 0,9283	0,028
13	-7,0	0,0	5,0	0,8	- 0,9304	0,130
14	-9,0	2,0	9,0	1,2	- 0,9662	-0,234
15	-11,0	-8,0	12,0	1,3	- 1,2949	-0,005
16	-13,0	-8,0	9,0	1,4	- 1,3227	-0,077
17	-15,0	-7,0	-1,0	1,3	- 1,2671	-0,033
18	-13,5	-4,0	0,0	1,1	- 1,1605	0,060
19	-10,0	1,0	4,0	1,0	- 0,9760	-0,024
20	-9,0	2,0	7,0	0,7	- 0,9495	0,250
21	-7,0	5,0	8,0	0,7	- 0,8298	0,130

Розв’язавши ці рівняння за методом найменших квадратів (МНК), знайдемо коефіцієнти матриці жорсткості K із середньою квадратичною помилкою апроксимації m = 0,123:

$$K = -0{,}7043 + 0{,}0264 + 0{,}0251 - 0{,}0083.$$

Підставивши ці значення і значення зміщень a (див. табл.) у вираз (46), знайдемо значення $f_{обч}$ і різниці Δf, які близькі до нуля (тому що зміщення $a_{h.j}$, $a_{x.j}$ і $a_{y.j}$ виміряні з деякою помилкою). У загальному розв’язку цих рівнянь $\sum\Delta f=0$, отже, знайдене рішення задовольняє рівняння (46).

Висновок. Порівнявши вирази (35) та (48), можна переконатися, що динамічна модель деформації збігається з узагальненою (динамічною) моделлю деформації, отже, її застосування може дати найкращі результати.

Порівнюючи відповідні матриці нормальних рівнянь (статичної, кінематичної та динамічної моделей), вдолося з’ясувати, що визначати функцію деформації краще за допомогою динамічної моделі. Перевагою є інтерполяційний підхід до визначення деформації. Вираз (46) являє собою складову частину загальної моделі, дає можливість розрахувати сили, які зумовлюють зміну форми, об’єму та розмірів об’єкта. Із таблиці і розрахунків коефіцієнтів матриці жорсткості K випливає, що рівняння (46) є динамічною моделлю. Якщо відомі коефіцієнти матриці жорсткості та вектор навантажень, то можна розрахувати вектори зміщення точок об’єкта a, і навпаки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гладілін В. М.* Деформації технологічного обладнання / В.М.Гладілін // Інженерна геодезія. – 1999. – № 41. – С. 31-38.

2. *Гладілін В. М.* Вимірювання деформацій радіохвильовими методами / В.М.Гладілін // Інженерна геодезія. – 2000. – № 43. – С. 72-75.

3. *Гладілін В. М.* Швидкість та прискорення деформаційного процесу / В.М. Гладілін, О. Л.Ремішевський // Інженерна геодезія. – 2001. – № 45. – С. 56-59.

4. *Гладілін В. М.* Визначення деформацій технологічного обладнання при періодичному навантаженні у часі/ В. М. Гладілін, О.В. Біляга // Інженерна геодезія. – 2002. – № 46. – С. 68-74.

5. *Гладілін В.М.* Дослідження моделі деформаційного процесу технологічного обладнання / В.М. Гладілін, П.О. Чуланов // Інженерна геодезія. – 2002. – № 48. – С. 70-77.

6. *Гладілін В.М.* Побудова системи автоматизованого визначення деформацій технологічного обладнання / В.М. Гладілін // Інженерна геодезія. – 2004. – № 50. – С. 34-37.

7. *Гладілін В. М.* Застосування теорії графів для дослідження деформацій промислового обладнання / В.М. Гладілін, П.О. Чуланов // Інженерна геодезія. – 2005. – № 51. – С. 77-82.

8. *Гладілін В.М.* Визначення моделі зміщення точок технологічного обладнання при деформаційних процесах / В. М. Гладілін, П.О. Чуланов, Н.С. Шудра // Інженерна геодезія. – 2015. – № 62. – С. 44-55.

9. *Гладілін В. М.* Моделі визначення деформацій/ В.М. Гладілін //Вісник астрономічної школи. – 2016. – Т. 12. – № 2 – С. 185-189.

10. Теоретическая физика: учебн. пособие для вузов: в 10 т. / под ред. Л.Д Ландау, Е. М. Лифшица. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – Т.1. – 224 с.

11. Математическое моделирование / В.И. Скурихин, В.Б. Шифрин, В.В. Дубровский. – Киев: Техника, 1983. – 270 с.

REFERENCES

1. Gladilin V. N. (1999). Deformatsii tehnologichnogo obladnannia [Deformation of technological equipment]. *Inzhenerna geodeziia –Engineering geodesy,* 41, 31-38 [in Ukrainian].

2. Gladilin V. N. (2000). Vimiryuvannya deformacij radiohvilovimi metodamy [Measurement of deformations by radio wave methods]. *Inzhenerna geodeziia – Engineering geodesy,* 43, 72-75 [in Ukrainian].

3. Gladilin V.N. & Remishevskyi O.L. (2001). Shvydkist ta pryskorennia deformatsiinoho protsesu [Speed and acceleration of deformation]. *Inzhenerna geodeziia –Engineering geodesy*, 45, 56-59 [in Ukrainian].

4. Gladilin V.N. & Biliaga O.V. (2002). Vyznachennia deformatsii tekhnolohichnoho obladnannia pry periodychnomu navantazhenni u chasi. [Determination of deformations of technological equipment at the periodic loading in time]. *Inzhenerna geodeziia –Engineering geodesy*, 46, 68-74 [in Ukrainian].

5. Gladilin V.N. & Chulanov P.A. (2002). Doslidzhennia modeli deformatsiinoho protsesu tekhnolohichnoho obladnannia. [Research of model of deformation process of technological equipment]. *Inzhenerna geodeziia –Engineering geodesy*, 48, 70-77 [in Ukrainian].

6. Gladilin V.N. (2004). Pobudova systemy avtomatyzovanoho vyznachennia deformatsii tekhnolohichnoho obladnannia. [Construction of the automated determination of deformations of tecnological process]. *Inzhenerna geodeziia – Engineering geodesy*, 50, 34-37 [in Ukrainian].

7. Gladilin V.N. (2005). Zastosuvannia teorii hrafiv dlia doslidzhennia deformatsii promyslovoho obladnannia. [Aplication of theory of columns for research of determinations of technological equipment]. *Inzhenerna geodeziia – Engineering geodesy*, 51, 77-82 [in Ukrainian].

8. Gladilin V. M., Chulanov P. O., Shudra N. S. (2015). Vyznachennia modeli zmischennia tochok tekhnolohichnoho obladnannia pry deformatsiinykh protsesakh [Determination of displacement of points is the result of the deformation of process equipment]. *Inzhenerna geodeziia – Engineering geodesy*, 62, 44-55 [in Ukrainian].

9.Gladilin V. N. (2016). Modeli viznachennya deformacij [Deformation to determine Models]. *Visnik astronomichnoyi shkoli – Astronomical Schools Report,* 2, 185-189 [in Ukrainian].

10. Landau L. D., & Lifshits E. M. (2004). Teoreticheskaya fizika [Theoretical Physics]. (Vols. 1). Moscow: FIZMATLIT [in Russian].

11. Skurihin V. I., Shifrin V. B. & Dubrovskiy V. V. (1983). Matematicheskoe modelirovanie. [Math modeling]. Kiev: Tehnika [in Ukrainian].

В. Н. Гладилин, А.О. Дубкова, П.А. Чуланов, Н.С. Шудра

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ КАК ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Учитывая особенности деформационных процессов выполнено сравнение различных деформационных моделей: статических, динамических, кинематических для выбора наиболее достоверной модели деформации промышленного оборудования. Выяснено, что среди деформационных моделей наиболее целесообразной оказалась динамическая модель, которая позволяет по измеренным деформациям рассчитывать силы, которые вызывают изменения формы и размеров объектов, а также влияют на их целостность.

Ключевые слова: *статическая, кинематическая и динамическая модели деформаций промышленного оборудования.*

V. Gladilin, A. Dubkova, P. Chulanov, N. Shudra

DEFORMATIONS MODELS FROM PHYSICAL PROCESS

To date, many functions have been developed for obtaining the values of horizontal and vertical deformations that occur mostly in the resulting pellet structures and industrial equipment, as well as the resulting additional pressure (hydroelectric dams). Some authors suggest such advanced mathematical functions that approximate as general methods for the determination of deformations, which does not quite reflect the reality. The article describes a model strain as physical processes. When comparing static, cinematic and dynamic models, it was found that the dynamic model of the most reliably reflects the deformation of structures and industrial equipment.

Deformation processes greatly affect the accident – free and non – stop operation of industrial equipment, since deformations can lead to shutdown of equipment (modern conveyer lines of large capacity for assembling cars) to the complete elimination of these determinations, and hence to large economic costs.

If the material from which the equipment is made is known, constant and periodic loads are known and the displacement of equipment points are measured by the dynamic model, it is possible to determine the forces that cause these displacements and deformations themselves. If the deformations are within acceptable limits, then the

equipment operation continues, otherwise the equipment must be stopped to eliminate deformations; at best, deformation can be eliminated without stopping the equipment.

Keywords: *static, cinematic and dynamic models deformations industrial equipment.*

Надійшла до редакції 13.04.2019

УДК 528.1 *https://doi.org/10.32347/0130-6014.2019.66.63-74*

О. І. Терещук, *канд. техн. наук, доцент,*
С. Д. Крячок*, канд. техн. наук, доцент*
кафедра геодезії, картографії та землеустрою
Чернігівський національний технологічний університет

АНАЛІЗ КРИТЕРІЇВ ВРАХУВАННЯ ЗАЛИШКОВИХ СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК У РЕЗУЛЬТАТАХ ПОДВІЙНИХ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ

У роботі розглянуто чутливість різних критеріїв до величин залишкових систематичних похибок у різницях подвійних рівноточних вимірів залежно від законів розподілу різниць та їх кількості у вибірці. За результатами математичного моделювання встановлено, що розглянуті критерії можуть мати різну чутливість до величини середнього значення різниць залежно від кількості різниць у вибірці та закону їх розподілу. Найбільш стабільним й оптимальним з розглянутих критеріїв є нерівність, що регламентує абсолютну величину середнього значення з різниць подвійних вимірів, яка не перевищує однієї п'ятої від середньої квадратичної похибки цих різниць. Встановлено, що цей критерій є стійким до кількості різниць подвійних вимірів у вибірці, закону їх розподілу та потребує найменшої кількості обчислень порівняно з іншими розглянутими критеріями.

Ключові слова*: теорія похибок вимірів; середня квадратична похибка; систематична похибка; подвійні рівноточні вимірювання; математичне моделювання.*

Вступ. Під час виконання геодезичних робіт деякі величини вимірюють двічі, утворюючи ряд подвійних вимірювань, за яким можна виконати оцінку точності та визначити ймовірні значення вимірювань. Систематичні похибки, які містяться в кожному з подвійних вимірювань, здатні частково компенсуватися в різницях подвійних вимірювань, однак залишкові систематичні складові можуть бути суттєвими. Для виявлення залишкових систематичних похибок в різницях подвійних вимірів застосовують різні критерії.

Аналіз досліджень і публікацій. Слід зазначити, що розглядаються подвійні вимірювання, рівноточні між собою та в кожній парі. В роботах [1; 2] наведено