equipment operation continues, otherwise the equipment must be stopped to eliminate deformations; at best, deformation can be eliminated without stopping the equipment.

Keywords: *static, cinematic and dynamic models deformations industrial equipment.*

Надійшла до редакції 13.04.2019

УДК 528.1 *https://doi.org/10.32347/0130-6014.2019.66.63-74*

О. І. Терещук, *канд. техн. наук, доцент,*
С. Д. Крячок*, канд. техн. наук, доцент*
кафедра геодезії, картографії та землеустрою
Чернігівський національний технологічний університет

АНАЛІЗ КРИТЕРІЇВ ВРАХУВАННЯ ЗАЛИШКОВИХ СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК У РЕЗУЛЬТАТАХ ПОДВІЙНИХ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ

У роботі розглянуто чутливість різних критеріїв до величин залишкових систематичних похибок у різницях подвійних рівноточних вимірів залежно від законів розподілу різниць та їх кількості у вибірці. За результатами математичного моделювання встановлено, що розглянуті критерії можуть мати різну чутливість до величини середнього значення різниць залежно від кількості різниць у вибірці та закону їх розподілу. Найбільш стабільним й оптимальним з розглянутих критеріїв є нерівність, що регламентує абсолютну величину середнього значення з різниць подвійних вимірів, яка не перевищує однієї п'ятої від середньої квадратичної похибки цих різниць. Встановлено, що цей критерій є стійким до кількості різниць подвійних вимірів у вибірці, закону їх розподілу та потребує найменшої кількості обчислень порівняно з іншими розглянутими критеріями.

Ключові слова: *теорія похибок вимірів; середня квадратична похибка; систематична похибка; подвійні рівноточні вимірювання; математичне моделювання.*

Вступ. Під час виконання геодезичних робіт деякі величини вимірюють двічі, утворюючи ряд подвійних вимірювань, за яким можна виконати оцінку точності та визначити ймовірні значення вимірювань. Систематичні похибки, які містяться в кожному з подвійних вимірювань, здатні частково компенсуватися в різницях подвійних вимірювань, однак залишкові систематичні складові можуть бути суттєвими. Для виявлення залишкових систематичних похибок в різницях подвійних вимірів застосовують різні критерії.

Аналіз досліджень і публікацій. Слід зазначити, що розглядаються подвійні вимірювання, рівноточні між собою та в кожній парі. В роботах [1; 2] наведено нерівність, яка має бути справедливою за незначних залишкових систематичних похибок:

$$|\sum_{i=1}^{n} d_i | \le 0{,}25 \sum_{i=1}^{n} | d_i |, \tag{1}$$

де d_i – різниці подвійних вимірювань, n – кількість різниць d_i.

Згідно з цим критерієм значення d_i підпорядковуються нормальному законові розподілу похибок вимірювань [1].

У статті [3] наведено критерій незначних систематичних похибок:

$$|\sum_{i=1}^{n} d_i | \le 1{,}25 \cdot t_\beta \sum_{i=1}^{n} | d_i | / \sqrt{n}, \tag{2}$$

де t_β – коефіцієнт Стьюдента, який визначають залежно від кількості надлишкових вимірювань та обраної довірчої ймовірності.

Реально для $n > 28$ та для довірчої ймовірності $P = 0{,}95$ критерій (2) має такий вигляд [3]:

$$|\sum_{i=1}^{n} d_i | \le 2{,}5 \sum_{i=1}^{n} | d_i | / \sqrt{n}. \tag{3}$$

Згідно з публікацією [4] брак значних залишкових систематичних похибок у різницях подвійних рівноточних вимірювань підтверджується критерієм

$$|\theta| \le \frac{2m}{\sqrt{n}}, \tag{4}$$

де θ – середня систематична похибка, яка дорівнює

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}, \tag{5}$$

а середню квадратичну похибку (СКП) одного вимірювання визначають за формулою:

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (d_i')^2}{2(n-1)}}, \tag{6}$$

де виправлені різниці d_i' розраховують за формулою

$$d_i' = d_i - \theta. \tag{7}$$

Наведений критерій передбачає нормальний закон розподілу різниць, оскільки в чисельнику формули (3) добуток $2m$ є відповідним граничній похибці, прийнятій в геодезії для довірчої ймовірності $P = 0{,}95$ [4].

Заслуговує на увагу твердження, наведене в літературі [1], згідно з яким «прийнято нехтувати систематичною похибкою в окремих вимірах, якщо вона докладає в сумарну похибку не більше $1/5$ її величини». Виходячи з цього, для визначення незначного відхилення (θ) від нуля для рівноточних вимірювань вважають, що

$$|\theta| \le 0{,}2 m_d. \tag{8}$$

У такому разі СКП однієї різниці d визначають за формулою [1]:

$$m_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n}} \,. \tag{9}$$

Критерій за формулою (8) не потребує підпорядкування різниць d_i будь-якому законові розподілу.

Аналіз наведених публікацій свідчить про наявність кількох критеріїв з визначення залишкової систематичної похибки в різницях подвійних рівноточних вимірювань. Згідно з дослідженнями, наведеними в статтях [3; 5], критерії за формулами (1) та (3) можуть давати в конкретному випадку протилежні результати, навіть якщо n = 30. Зокрема, за результатами опрацювання ряду подвійних рівноточних вимірювань для n = 10 та $t_\beta = 1{,}8$ за довірчої ймовірності $P = 0{,}9$ критерії за формулами (2) та (3) дають протилежні результати. Недослідженим є застосування наведених критеріїв для різних законів розподілу різниць подвійних рівноточних вимірювань та чутливості їх до значень залишкових систематичних похибок у результатах подвійних рівноточних вимірювань залежно від кількості різниць у вибірці.

Постановка завдання. Головною метою цієї статті є дослідження чутливості критеріїв до величин залишкових систематичних похибок у різницях подвійних рівноточних вимірювань залежно від законів розподілу різниць та кількості їх у вибірці**.**

Основна частина. В роботі [3] автори стверджують, що для обчислення СКП m'_d різниць d'_i подвійних вимірювань, звільнених від систематичної складової θ, у формулі

$$m_{d'} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d'_i}{n-1}} \tag{10}$$

у знаменнику потрібно мати кількість вимірів n, а не $n-1$. Такий підхід підтверджується формулою

$$m_{d'} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} - \theta^2} \,. \tag{11}$$

Дійсно, якщо взяти до уваги формулу (7) та піднести її праву та ліву частини до квадрата

$$(d'_i)^2 = d_i^2 + \theta^2 - 2d_i\theta \,, \tag{12}$$

то сума квадратів лівої та правої частини формули (12) набуде такого вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} (d'_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 + n\theta^2 - 2\theta \sum_{i=1}^{n} d_i \,. \tag{13}$$

Беручи до уваги значення θ за формулою (5) і підставивши її у вираз (13), матимемо контрольну формулу для обчислення $\sum_{i=1}^{n} (d'_i)^2$ [1]:

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i')^2=\sum_{i=1}^{n}d_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}. \quad (14)$$

Якщо поділити праву та ліву частини формули (14) на n, отримаємо:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i')^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n^2}, \quad (15)$$

або з огляду на рівності (5) та (9) матимемо:

$$m_{d'}=\sqrt{m_d^2-\theta^2}. \quad (16)$$

Вираз (16) збігається з формулою (11). Таким чином, математично підтверджено підхід для обчислення СКП m_d' різниць d_i' подвійних вимірювань, звільнених від систематичної складової θ, запропонований у роботі [3].

Варто додати, що з формули (16) випливає відома математична модель зв'язку СКП випадкової і систематичної складових та загальної СКП (формула Б'єнеме) [6], яка з огляду на рівність (16) має вигляд

$$m_d=\sqrt{m_{d'}^2+\theta^2}. \quad (17)$$

Крім того, якщо поділити ліву та праву частини формули (14) на $n-1$, то в лівій частині отримаємо вираз (10), а в правій частині – некоректний вираз.

З метою досягнення поставленої мети було виконане математичне моделювання з використанням таких вихідних даних. Спочатку побудовано достатньо велику вибірку з d_i=100, що не суперечить нормальному законові розподілу. За довірчу ймовірність взято $P=0{,}95$ як таку, що є найчастіш застосовуваною для опрацювання результатів геодезичних вимірювань. Математичне сподівання $M(d)$ різниць двох рівноточних вимірів l та l' однієї тієї самої величини L дорівнює $M(d)=M(l-l')=M(l)-M(l')=L-L=0$, якщо в значеннях d_i немає систематичної складової. Отже, щільність нормального розподілу в такому разі за умови, що випадкова величина $x=d$, визначається за формулою [1]

$$\varphi(d)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[d-M(d)]^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d^2}{2\sigma^2}}, \quad (18)$$

що збігається з формулою для щільності нормованого нормального розподілу. Тому для значень d_i, які попадають у відповідні інтервали від $-2d$ до $+2d$, були використані таблиці значень інтеграла ймовірностей [1] у вигляді виразу

$$\Phi(d)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^d e^{-\frac{d^2}{2}}d(d). \quad (19)$$

Значення d_i, які попадають у відповідні додатні інтервали від 0 до $2d$, були визначені за допомогою генератора випадкових чисел. Симетричні від'ємні значення $-d_i$ збігалися з додатними значеннями для дотримання початкової умови $\sum d=0$. У підсумку отримано значення різниць d_i (табл. 1).

Таблиця 1

Ряд значень різниць d_i у кількості N = 100

$i\,/\,j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,01	0,21	0,43	0,79	1,28	-0,01	-0,21	-0,43	-0,79	-1,28
2	0,01	0,24	0,44	0,83	1,28	-0,01	-0,24	-0,44	-0,83	-1,28
3	0,06	0,25	0,45	0,85	1,32	-0,06	-0,25	-0,45	-0,85	-1,32
4	0,07	0,26	0,52	0,85	1,43	-0,07	-0,26	-0,52	-0,85	-1,43
5	0,1	0,29	0,59	0,86	1,51	-0,1	-0,29	-0,59	-0,86	-1,51
6	0,11	0,31	0,62	0,94	1,55	-0,11	-0,31	-0,62	-0,94	-1,55
7	0,11	0,36	0,68	1,02	1,63	-0,11	-0,36	-0,68	-1,02	-1,63
8	0,13	0,38	0,72	1,02	1,67	-0,13	-0,38	-0,72	-1,02	-1,67
9	0,13	0,41	0,75	1,11	1,86	-0,13	-0,41	-0,75	-1,11	-1,86
10	0,15	0,43	0,78	1,19	1,91	-0,15	-0,43	-0,78	-1,19	-1,91

Для перевірки відповідності угруповання d_i нормальному законові використано критерій Пірсона [1]:

$$\chi^2 = \sum_{1}^{m} \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}, \qquad (20)$$

де n_i – кількість d_i в інтервалі під номером i, N – загальна кількість d_i, $p_i = 0{,}5 \cdot \Delta\Phi_i(d)$ – ймовірність появи значень d_i в інтервалі під номером i згідно з таблицею значень інтеграла ймовірностей [1], m – кількість інтервалів.

У підсумку (табл. 2) отримано значення $\chi^2 = 1{,}916$ для кількості інтервалів $k = 10$, числа ступенів довільності $10 - 3 = 7$ та $q = 1 - P = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$, а також отримано табличне значення $\chi_q^2 = 14{,}1$. Оскільки $\chi^2 < \chi_q^2$, то розподіл d_i не суперечить нормальному.

Таблиця 2

Статистичний ряд розподілу d_i, застосування критерію Пірсона, ординати гістограми (N = 100)

№ інтервалу	*l*	n	Q= n/N	*Φ(t)*	$p = \Delta\Phi/2$	A = N·p	B = $(n - A)^2$	*B/A*	*Q*/0,4	*y*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-2,2 – 1,8	2	0,02	0,9722	0,0221	2	0	0	0,05	0,054
2	-1,8 -1,4	5	0,05	0,9281	0,0448	4	1	0,25	0,125	0,111
3	-1,4 -1,0	7	0,07	0,8385	0,0780	8	1	0,125	0,175	0,194
4	-1,0 -0,6	11	0,11	0,6826	0,1156	12	1	0,083	0,275	0,290
5	-0,6 -0,2	15	0,15	0,4514	0,1480	15	0	0	0,375	0,368
6	-0,2 2,0	20	0,2	0,1554	0,1554	16	16	1	0,5	0,399
7	0,2 0,6	15	0,15	0,4514	0,1480	15	0	0	0,375	0,368
8	0,6 1,0	11	0,11	0,6826	0,1156	12	1	0,083	0,275	0,290
9	1,0 1,4	7	0,07	0,8385	0,0780	8	1	0,125	0,175	0,194
10	1,4 1,8	5	0,05	0,9281	0,0448	4	1	0,25	0,125	0,111
11	1,8 2,2	2	0,02	0,9722	0,0221	2	0	0	0,05	0,054
Σ		100	1,00		0,9722	98		1,916		

Згідно з даними, розміщеними у стовпчиках 10 та 11 табл. 2, побудовано гістограму вибіркового розподілу d_i та відповідну криву цільності нормального нормованого розподілу (рис. 1), яка свідчать про добру узгодженість розподілів.

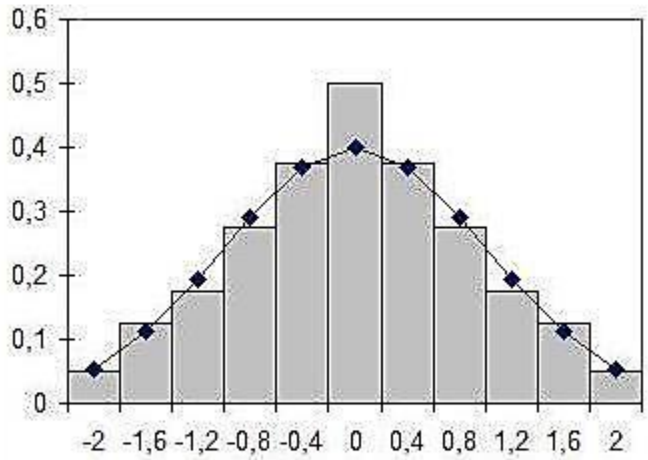

Рис.1. Гістограма вибіркового розподілу та крива щільності нормованого нормального розподілу

Під час математичного моделювання за допомогою програмного засобу Excel до значень d_i додавали додатні величини c з дискретністю 0,01, імітуючи появу середньої систематичної похибки θ $(\theta = c)$. Гістограма вибіркового розподілу в цьому випадку зміщувалась праворуч (див. рис. 1).

У результаті виявлено наявність систематичної складової θ=0,13 критерію №4. В цьому випадку зауважуємо також однакову чутливість критеріїв №1-№3 та №5 до наявності систематичної похибки θ=0,18 (табл. 3). Це й зрозуміло, оскільки в основі критеріїв №1-№3 міститься нерівність (8), яка утворює критерій №5.

Таблиця 3

Чутливість критеріїв до систематичної складової θ

N	№ критерію	№ формули	Значення		θ	Коефіцієнт Стьюдента	m_d	$k = \frac{\theta}{m_d}$
			ліворуч	праворуч				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
100*	1	1	18,0	17,9	0,18	-	0,893	0,20
	2	2	18,0	17,8	0,18	1,99 [7]	0,893	0,20
	3	3	18,0	17,9	0,18	-	0,893	0,20
	4	4	0,130	0,124	0,13	-	0,885	0,15
	5	8	0,180	0,179	0,18	-	0,893	0,20
10*	1	1	8,0	7,6	0,8	-	3,130	0,26
	2	2	37,0	37,0	3,7	2,23 [7]	4,780	0,77
	3	3	32,0	31,62	3,2	-	4,405	0,73
	4	4	0,600	0,535	0,6	-	3,085	0,19
	5	8	0,700	0,621	0,7	-	3,106	0,22
30**	1	1	21,0	20,9	0,7	-	3,229	0,22
	2	2	42,0	42,0	1,4	2,4 [7]	3,449	0,41
	3	3	42,0	40,71	1,4		3,449	0,41
	4	4	0,900	0,828	0,9		3,278	0,27
	5	8	0,700	0,646	0,7		3,229	0,22

* - нормальний розподіл; ** - рівноймовірний розподіл

Наступну тестову вибірку (табл. 4) обсягом N = 10 запозичено зі статті [3]. Виконано тестування вибірки на відповідність нормальному розподілу за критерієм Колмогорова за стандартною процедурою, наведеною в роботі [1]. З'ясовано, що вибірка значень d_i не суперечить нормальному розподілу.

Таблиця 4

Вибірка d_i обсягом N=10 та застосування до неї критерію Колмогорова

№	d_i	z_i	$F'(z_i)$	$F(z_i)$	D_i	№	d_i	z_i	$F'(z_i)$	$F(z_i)$	D_i
1	-5,2	-1,718	0,05	0,043	0,007	6	1,8	0,595	0,55	0,724	-0,174
2	-4,2	-1,388	0,15	0,0825	0,0675	7	1,8	0,595	0,65	0,724	-0,074
3	-4,2	-1,388	0,25	0,0825	0,1675	8	1,8	0,595	0,75	0,724	0,026
4	0,8	0,264	0,35	0,604	-0,254	9	2,8	0,925	0,85	0,877	-0,027
5	1,8	0,595	0,45	0,724	-0,274	10	2,8	0,925	0,95	0,877	0,073

$\bar{d} = 0$; $m_d = 3{,}027$; $|D_{max}|$=0,274; D_q=0,41 ($q = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$; $n = 10$) [1]; $|D_{max}| < D_q$.

Результати математичного моделювання наведено в табл. 3, у якій найбільш чутливими до значення систематичної похибки є критерії №4 (θ = 0,6) та №5 (θ = 0,7), далі – №1, №3, №2. Як видно з наведеного, незначний обсяг вибірки призвів до неузгодженості критерію 1, а особливо критеріїв 2, 3 і 5.

Для визначення чутливості критеріїв до іншого виду розподілу, окрім нормального, утворено вибірку значень d_i у кількості N = 30, які повинні підпорядковуватися рівноймовірному законові розподілу (табл. 5). Значення d_i, об'єднані у шість інтервалів (табл. 6) по п'ять елементів у кожному, утворили статистичний ряд розподілу. Значення d_i у кожному інтервалі добирали за допомогою генератора випадкових чисел, причому значення d_i у від'ємних інтервалах є копією значень у додатних інтервалах, що забезпечує симетричний розподіл.

Таблиця 5

Ряд значень d_i у кількості N = 30

i / j	1	2	3	4	5	6
1	-4,8	-3,6	-1,5	0,1	2,6	4,2
2	-4,5	-3,5	-0,7	0,3	2,7	4,2
3	-4,3	-3,1	-0,5	0,5	3,1	4,3
4	-4,2	-2,7	-0,3	0,7	3,5	4,5
5	-4,2	-2,6	-0,1	1,5	3,6	4,8

Інтегральну функцію рівноймовірного симетричного розподілу похибок d_i в інтервалі $-b \le x \le b$ можна описати залежністю [1]

$$F(d) = \frac{x+b}{2b}, \tag{21}$$

а щільність рівноймовірного симетричного розподілу – виразом

$$\varphi(d) = \frac{1}{2b}. \tag{22}$$

Значення *F(d)* у стовпчику №5 (табл. 6) обчислено за формулою (21) ($b=6$): для від'ємних інтервалів – для лівих меж інтервалів, для додатних – для правих меж.

Таблиця 6

Статистичний ряд розподілу d_i (*N* = 30)

№ інтервалу	*l*	*n*	*Q*= n/N	*F(d)*	$\Delta F(d)$	*A* = *N·p*	*Q/2*	*y*
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-6 –4	5	0,167	0	0,167	5	0,083	0,083
2	-4 -2	5	0,166	0,167	0,166	5	0,083	0,083
3	-2 -0	5	0,167	0,333	0,167	5	0,083	0,083
4	0 2	5	0,167	0,667	0,167	5	0,083	0,083
5	2 4	5	0,166	0,833	0,166	5	0,083	0,083
6	4 6	5	0,167	1	0,167	5	0,083	0,083
Σ		30	1,000		1,000	30		

$F(0)=0{,}5$

Значення різниць $\Delta F(d)$ у шостому стовпчику визначено з урахуванням $F(0)=0{,}5$. Для побудови гістограми розподілу були визначені висоти прямокутників гістограми (8-й стовпчик) і теоретичні значення щільності цього рівноймовірного розподілу (9-й стовпчик) за формулою (22).

За результатами розрахунків побудовано гістограму вибіркового розподілу та пряму теоретичної щільності рівноймовірного розподілу. Положення прямої теоретичної щільності на гістограмі свідчить про узгодженість щільності вибіркового й теоретичного розподілів (рис. 2).

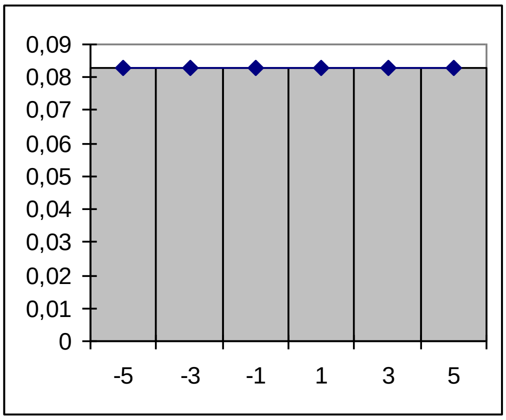

Рис.2. Гістограма вибіркового розподілу та пряма теоретичної щільності рівноймовірного розподілу

На підставі значень d_i, наведених у табл. 5, було виконане математичне моделювання, результати якого наведено в табл. 3. Виявлено, що однакову та вищу чутливість мають критерії №1 та №5 ($\theta=0{,}7$), меншу – критерії №4 ($\theta=0{,}9$) та № 2 і №3 $\theta=1{,}4$.

Отже, найбільш поширеними в наведених джерелах є критерії за №1 - №3 (формули (1) – (3)). У разі значного обсягу значень різниць подвійних рівноточних вимірів ці критерії свідчать про однакову чутливість до величини середнього значення залишкових систематичних похибок у різницях за умови близькості розподілу різниць до нормального. Для малих обсягів різниць характерним є неузгодження чутливості цих критеріїв, що спричиняє протилежні оцінки допустимої величини середнього значення залишкових систематичних похибок. Таке неузгодження виникає і тоді, коли закон розподілу різниць відрізняється від нормального. Найбільш чутливим серед вказаних критеріїв є перший – у разі малого обсягу різниць та відмінності їх розподілу від нормального.

Наступний, четвертий, критерій має найвищу серед розглянутих критеріїв чутливість до величини середнього значення залишкових систематичних похибок у різницях подвійних рівноточних вимірів незалежно від обсягу вибірки та дещо меншу чутливість, якщо розподіл різниць відрізняється від нормального.

Критерій №5 (формула (8)) має однакову з критеріями №1 – №3 чутливість до величини середнього значення залишкових систематичних похибок у різницях подвійних рівноточних вимірів у разі значного обсягу значень різниць, проте за малих обсягів різниць його чутливість близька до критерію №4. Якщо розподіл різниць відрізняється від нормального, то цей критерій має високу чутливість на рівні критерію №1.

Найбільш оптимальним з-поміж розглянутих є критерій за №5 (формула (8)) з таких міркувань. Цей критерій не залежить від виду розподілу значень різниць подвійних рівноточних вимірів, величин обсягів різниць та ґрунтується на твердженні, що систематична складова θ за модулем не повинна перевищувати $1/5 = 0{,}2$ загальної СКП m_d (яка містить випадкову та систематичну складові), що виражається формулою (8). Такий підхід, коли $0 \le |\theta| \le 0{,}2 m_d$, дає змогу отримати $1 \ge m_{d'} \ge 0{,}980 m_d$, тобто випадкова складова $m_{d'}$ у такому разі буде зменшена лише на 100% - 98% = 2% загальної складової m_d. Про стабільність утримання співвідношення між систематичною складовою θ та загальною СКП m_d свідчить коефіцієнт $k = \theta / m_d$, значення якого є близьким до 0,2 незалежно від виду розподілу різниць й обсягу. Іншим критеріям така стабільність не властива.

Крім того, критерій потребує мінімуму розрахунків, оскільки для обчислення складових критерію не потрібно визначати абсолютні величини різниць та їх суму, як для критеріїв №1 – №3, або знаходити різниці, вільні від середнього значення систематичних складових (формула (7)) та обчислювати СКП випадкової складової за формулою (6), як для критерію №4.

Висновки. За даними математичного моделювання встановлено, що розглянуті критерії для виявлення залишкових систематичних похибок у різницях подвійних рівноточних вимірів можуть мати різну чутливість до величини середнього значення різниць залежно від кількості різниць у вибірці та закону їх розподілу. Найбільш стабільним й оптимальним з-поміж розглянутих критеріїв є нерівність, яка підтверджує, що абсолютна величина середнього значення з різниць подвійних вимірів не повинна перевищувати однієї п’ятої від середньої квадратичної похибки цих різниць. Цей критерій стійкий до кількості різниць подвійних вимірів у вибірці, закону їх розподілу та потребує найменшої кількості обчислень порівняно з розглянутими критеріями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Войтенко С. П.* Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів [Текст]: навч. посіб. / С. П. Войтенко. – К.: КНУБА, 2003.- 216 с.

2. *Зазуляк П. М.* Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань [Текст]: навч. посіб. / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсеєва, М.Д. Йосипчук. – Львів: Растр 7, 2007. – 408 с.

3. *Рябій В.А.* Математичне обробка результатів подвійних рівноточних вимірів [Текст] / В.А. Рябій, В.В. Рябій // Геодезія, картографія і аерофотознімання. - 2015. – Вип. 81. - С. 74-81.

4. *Оцінка* точності за різницями подвійних рівноточних вимірів [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http: // kaf-gis.kh.ua/72-ocinka-tochnosti-za-riznicyami-podviynih-rivnotochnih-vimiriv. – Назва з екрана. – Дата звернення 11.12. 2018.

5. *Рябій В.А.* Математичне опрацювання результатів подвійних нерівноточних вимірів [Текст] / В.А. Рябій, В.В. Рябій // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. - 2015. – Вип. I (29). - С. 33-38.

6. *Видуев Н.Г.* Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений [Текст] / Н.Г Видуев, Г.С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.

7. *Жученко А.І.* Опрацювання параметрів та перевірка статистичних гіпотез. Теорія та практика роботи з MathCAD, MatLab, MS Excel [Текст]: навч. посіб. / А.І. Жученко, Л. Д. Ярощук. – К.:НТУУ «КПІ», 2012. – 156 с.

REFERENCES

1. Voytenko, S. P. (2003). Matematychna obrobka heodezychnykh vymiriv. Teoriya pokhybok vymiriv [Mathematical processing of geodetic measurements. Theory of measurement errors]. Kyiv: KNUBA [in Ukrainian].

2. Zazulyak P.M. (2007). Osnovy matematychnoho opratsyuvannya heodezychnykh vymiryuvan [Fundamentals of mathematical processing of geodetic measurements] Lviv: Rastr [in Ukrainian].

3. Ryabiy, V.A., & Ryabiy, V.V. (2015). Matematychna obrobka rezulʹtativ podviynykh rivnotochnykh vymiriv [Mathematical treatment of the results of double homogeneous measurements]. Heodeziya, kartohrafiya i aerofotoznimannya - Geodesy, cartography and aerial photography, 81, 74-81 [in Ukrainian].

4. Otsinka tochnosti za riznytsyamy podviynykh rivnotochnykh vymiriv [Estimation of the accuracy of the differences in double homogeneous measurements]. Retrieved from http: // kaf-gis.kh.ua/72-ocinka-tochnosti-za-riznicyami-podviynih-rivnotochnih-vimiriv [in Ukrainian].

5. Ryabiy, V.A., & Ryabiy, V.V. (2015). Matematychne opratsyuvannya rezulʹtativ podviynykh nerivnotochnykh vymiriv [Mathematical analysis of the results of double non-uniform measurements] Cuchasni dosyahnennya heodezychnoyi nauky ta vyrobnytstva - Contemporary achievements in geodetic science and production, 1 (29), 33-38 [in Ukrainian].

6. Viduyev, N.G., & Kondra, G.S. (1969). Veroyatnostno-statisticheskiy analiz pogreshnostey izmereniy [Probabilistic-statistical analysis of measurement errors]. Moskva: Nedra [in Russian].

7. Zhuchenko A.I., & Yaroshchuk, L. D. (2012). Opratsyuvannya parametriv ta perevirka statystychnykh hipotez. Teoriya ta praktyka roboty z MathCAD, MatLab, MS Excel [Working out parameters and checking statistical hypotheses. The theory and practice of working with MathCAD, MatLab, MS Excel]. Kyiv: NTUU "KPI" [in Ukrainian].

А. И. Терещук, С. Д. Крячок

АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ УЧЕТА ОСТАТОЧНЫХ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ В РЕЗУЛЬТАТАХ ДВОЙНЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В работе расмотрена чувствительность различных критериев к величинам остаточных систематических погрешностей в разностях двойных равноточных измерений в зависимости от законов распределения разностей и их количества в выборке. По результатам математического моделирования установлено, что рассмотренные критерии могут иметь разную чувствительность к величине среднего значения разностей в зависимости от количества разностей в выборке и закона их распределения.

На основании результатов проведенного анализа наиболее стабильным и оптимальным из рассмотренных критериев является неравенство, регламентирующее абсолютную величину среднего значения из разностей двойных измерений, что не превышает одной пятой от средней квадратичной погрешности этих разностей. Установлено, что этот критерий устойчив к числу разностей двойных измерений в выборке, закону их распределения и требует наименьшего количества вычислений по сравнению с рассмотренными критериями.

Ключевые слова: *теория погрешностей измерений; средняя квадратическая погрешность; систематическая погрешность; двойные равноточные измерения; математическое моделирование.*

O. Tereshchuk, S. Kryachok

ANALYSIS OF CRITERIA FOR ACCOUNTING RESIDUAL SYSTEMATIC ERRORS IN THE RESULTS OF DOUBLE EQUALIZED MEASUREMENTS

The study of issues of improving the accuracy of geodetic measurements by identifying, recording and minimizing the influence of systematic errors always remain relevant and are in the special attention of geodesists.

It is known that when performing double measurements, systematic errors in their differences are partially compensated, but the residual systematic components can be significant.

To identify residual systematic errors, there are various criteria, the study of the sensitivity of which to the values of residual systematic errors in the differences of *double equal-value measurements depending on the laws of distribution of differences and their number in the sample is devoted to this work. In the article, according to the results of mathematical modeling, it was established that the criteria considered for identifying residual systematic errors in the differences of double equal measurements may have different sensitivity to the average value of differences depending on the number of differences in the sample and the law of their distribution.*

Based on the results of the analysis performed, the most stable and optimal of the considered criteria is the inequality regulating the absolute value of the average value of the differences in double measurements, which does not exceed one-fifth of the mean square error of these differences. It is established that this criterion is resistant to the number of differences in double measurements in the sample, the law of their distribution, and requires the least amount of calculations as compared with the considered criteria.

Keywords: *theory of measurement errors; mean square error; systematic error; double equal measurements; math modeling.*

Надійшла до редакції 15.04.2019

УДК 528.48 *https://doi.org/10.32347/0130-6014.2019.66.74-84*

Ю.В. Медведський, *канд. техн. наук, ас. кафедри інженерної геодезії*
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИКОРИСТАННЯ АВТОРЕГРЕСІЇ В ЗАДАЧІ СПОСТЕРЕЖЕННЯ ЗА ОСІДАННЯМИ СПОРУД

У роботі розглянуто підхід до вирішення задачі прогнозування значень осідань споруд на підставі малої вибірки спостережень. Виконано аналіз існуючих математичних алгоритмів прогнозування рядів вимірювань на основі застосування авторегресійних функцій типу ARIMA. Проведено порівняння результатів роботи алгоритмів прогнозування значень відміток контрольних точок в безкоштовному та платному програмному забезпеченні, за яким визначено малу відмінність між ними. Виконано аналіз впливу рангу моделі ARIMA на точність прогнозування ряду вимірів, що дозволив зробити висновки про відсутність суттєвого підвищення якості прогнозної моделі з підвищенням її рангу більше двох. Проведено аналіз можливості використання алгоритму ARIMA при наявності динамічного процесу осідання споруди, що підтвердив можливість прогнозування на один і два кроки вперед. Встановлено, що запропонована модель прогнозування значень осідань на підставі авторегресійної функції з ковзаючим середнім має високий рівень прогнозування за малою вибіркою даних та дозволяє проводити математично обґрунтовані роботи з планування циклів спостережень за процесом осідання споруд.